9/10/2018

$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n} \to (A+B)+C = A+(B+C)$

$A_{m\times n} + \underset{\text{μηδενικός}}{O_{m\times n}} = A_{m\times n}$

$A+B = B+A$ αντιμεταθετική

$\forall A \Rightarrow \exists !\, B = (-1)A$ ώστε

$A + \underset{\text{αντίθετος του } A}{B} = O_{m\times n}$

$\underset{\text{αριθμός}}{c} \cdot A_{m\times n} = C_{m\times n}$ σημειακό γινόμενο

$c(A+B) = c\cdot A + cB$

$(c+c')A = cA + c'B$

$(c\cdot c')\cdot A = c\cdot(c'\cdot A)$

$c\cdot(A\cdot B) = (c\cdot A)\cdot B = A\cdot(c\cdot B)$

$A_{m\times n} \cdot B_{n\times k} = C_{m\times k}$ Γινόμενο.

$(A\cdot B)\cdot C = A\cdot(B\cdot C)$

$A_{m\times n}\cdot I_{n\times n} = A_{m\times n} = I_{m\times m}\cdot A_{m\times n}$

$A\cdot B \neq B\cdot A$

Στο $\mathbb{R}$ ισχύει. $(\alpha\cdot\beta)\gamma = \alpha(\beta\cdot\gamma)$

$\alpha\cdot 1 = \alpha = 1\cdot\alpha$

$\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$

$\forall \alpha\neq 0 \quad \exists\ \alpha^{-1}$

$\alpha\cdot\alpha^{-1} = 1 = \alpha^{-1}\cdot\alpha$

$\exists\ A^{-1}$???

$A\cdot(B+C) = AB + AC$

Αποδ. $\underset{m\times n}{(A}\cdot\underset{n\times l}{B)}\underset{l\times p}{C} = \underset{m\times n}{A}\underset{n\times p}{(BC)} \to \quad m\times p$

$\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times l}{B} = D = (d_{ij}) = \left(\sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} b_{sj}\right)$

$D\cdot C = E = (f_{ij}) = \left(\sum_{t=1}^{l} d_{it} c_{tj}\right) = f_{ij} = \left(\sum_{t=1}^{l}\left(\sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} b_{st}\right) c_{tj}\right) =$

$B\cdot C = H$

$A\cdot H = K$

$\left(f_{ij} = \sum_{t=1}^{l}\sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} b_{st}\, c_{tj} = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} \sum b_{st} c_{tj}\right)$

$\to \sum_{t=1}^{l} b_{st} c_{tj} = h_{sj} \to \sum_{s=1}^{n} \alpha_{is} h_{sj}$

$\to k_{ij}$

Ανάστροφος

$A^t_{m\times n} = (\alpha'_{ij})\quad \alpha'_{ij} = \alpha_{ji} \qquad A_{m\times n} = (\alpha_{ij})$

$(A+B)^t = A^t + B^t$ άσκηση

$(AB)^t = B^t\cdot A^t$

$A\cdot B = \left(c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{it} b_{tj}\right) \Rightarrow (AB)^t$

$B^t\cdot A^t = \left(c'_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b'_{it}\alpha'_{tj}\right) = \left(c'_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{ti}\, \alpha_{jt}\right) = ,\left(c'_{ij} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{jt} b_{ti}\right)$

$A^t = (\alpha'_{ij}) \quad \alpha'_{ij} = \alpha_{ji} \qquad B^t = (b'_{ij}) \quad b'_{ij} = b_{ji}$

$c_{ji} = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{jt}\cdot b_{ti} \Rightarrow (AB)^t = B^t\cdot A^t$

$A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B) = (A-B)\cdot A + (A-B)B = AA - BA + AB - BB$

$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$(A^2 - I) = A^2 - I^2 = (A-I)(A+I)$

A συμμετρικός $\Leftrightarrow A = A^t$

$(a_{ij}) = (a_{ji})$

Είναι το άθροισμα συμμετρικών συμμετρικός πίνακας;

» γινόμενο »

$A = A^t$, $B = B^t$ $\quad A+B = (A+B)^t = A^t + B^t = A+B \Rightarrow A+B$ συμμετρικός

$A = A^t$, $B = B^t$ $\quad (A\cdot B)^t$;;;

$A\cdot B = (c_{ij}) = (\sum_{t=1}^{n} a_{it} b_{tj}) = (c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} a_{ti} b_{jt}) - (c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} b_{jt} a_{ti})$

$a_{it} = a_{ti}$ ↗

$b_{tj} = b_{jt}$

Είναι το (j,i) στοιχείο του BA.

$(A\cdot B)^2 = (A\cdot B)(A\cdot B) = A\cdot(A\cdot B)\cdot B \neq A^2 \cdot B^2$

Π.χ. Δ.ο. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Να βρεθεί πίνακας B ώστε

$A\cdot B = I_{2\times 2} = B\cdot A$

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, τότε θα πρέπει

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x + 2z = 1$

$y + 2u = 0$

$3x + 4z = 0$

$3y + 4u = 1$

$x = 1 - 2z$

$3 \cdot (1 - 2z) + 4z = 0$

$3 - 6z + 4z = 0$

$-2z = -3$

$\boxed{z = \frac{3}{2}}$

$x + \cancel{2} \cdot \frac{3}{\cancel{2}} = 1$

$x = -3 + 1$

$\boxed{x = -2}$

$y = -2u$

$3 \cdot (-2u) + 4u = 1$

$-6u + 4u = 1$

$-2u = 1$

$2u = -1$

$\boxed{u = -\frac{1}{2}}$

$y = -\cancel{2}\left(-\frac{1}{\cancel{2}}\right)$

$\boxed{y = 1}$

Άρα ο B είναι:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα ο A έχει τον B αντίστροφο

Scanned by CamScanner

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A_{n \times n}$ θα καλείται αντιστρέψιμος εάν υπάρχει B: $A \cdot B = I_{n \times n} = B \cdot A$

Ο B καλείται ο αντίστροφος του A και συμβολίζεται με A^{-1}

Ερώτημα: Έχει κάθε πίνακας αντίστροφο;
Όχι ο μηδενικός π.χ. δεν έχει αντίστροφο.

Ερώτημα: Πότε ένας τετραγωνικός πίνακας A έχει αντίστροφο;

Αριθμοί $+$ $-$ $\frac{\alpha}{b} = \alpha \cdot b^{-1} = b^{-1} \cdot \alpha$

$\cdot$ $\div$

$b \neq 0$

Έστω ότι ο πίνακας B έχει αντίστροφο
Ορίζεται η διαίρεση $\cancel{\frac{A}{B}} \neq A \cdot B^{-1} \neq B^{-1} \cdot A$

$M(n \times n, \mathbb{R})$ πρόσθεση
σημειακό γινόμενο
γινόμενο

$M(m \times n, \mathbb{R})$ πρόσθεση
σημειακό γινόμενο.

$M(n \times n, \mathbb{R}) \supseteq GL(n, \mathbb{R})$

$GL(n, \mathbb{R})$ γενική γραμμική ομάδα. $\{$ όλους τους $n \times n$ αντιστρέψιμους πίνακες $\}$

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin GL(2,\mathbb{R})$$

Στην $GL(n,\mathbb{R})$ δεν έχουμε πρόσθεση $A, B \in GL(n,\mathbb{R})$

$\Rightarrow A\cdot B \in GL(n,\mathbb{R})$.

$AB \in GL(n,\mathbb{R}) \iff A\cdot B$ αντιστρέψ. Βρες τον $(A\cdot B)^{-1}$

Βρες C πίνακα ώστε $(AB)\,C = I$

$(A\cdot B)\,C = I$

$\exists A^{-1}$ και $\exists B^{-1}$

ορίζουμε $C = B^{-1}\cdot A^{-1}$

$(A\cdot B)(B^{-1}\cdot A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI\cdot A^{-1} = (AI)A^{-1} = A\cdot A^{-1} = I$